

# Ein Beitrag zur Bestimmung der mittleren Zeitkonstante von Diffusionsprozessen\*

ANDRZEJ BRYKALSKI

IEI, Technische Universität Szczecin, Sikorskiego 37, Polen

(Received 19 March 1984 and in revised form 5 September 1984)

**Zusammenfassung**—In der Arbeit wurde die allgemeine Methode von Galerkin zur Bestimmung der mittleren Zeitkonstante von Diffusionsvorgängen ausgenutzt. Nach der Bestimmung einer Sprungantwort wurden die allgemeinen Beziehungen abgeleitet, die die Berücksichtigung der Randbedingungen verschiedener Art ermöglichen. Die Methode wurde an einigen Berechnungsbeispielen erläutert.

## 1. EINLEITUNG

EINE REIHE von technischen Problemen verbindet sich mit der Notwendigkeit der Bestimmung von aperiodischen Ausgleichsvorgängen, die man durch die parabolischen partiellen Differentialgleichungen beschreiben kann. In mehreren Fällen reicht es, für die praktischen Ziele, die Kenntnis der Dauer eines instationären Zustandes und der räumlichen Feldverteilung in einem stationären Zustand. Die stationären Felder werden mit Hilfe der elliptischen Differentialgleichungen beschrieben, die im Vergleich zu den parabolischen Gleichungen, leichter zu lösen sind. Die Dauer eines instationären Zustandes des Feldes  $T(P, t)$  kann man auf eine bequeme Weise mit Hilfe der mittleren Zeitkonstante [2, 3, 13]

$$\tau(P) = \int_0^\infty \frac{T(P, t) - T(P, \infty)}{T(P, 0) - T(P, \infty)} dt \quad (1)$$

bestimmen, wobei  $P$  ein beliebiger Punkt des Raumes  $\Omega$  ist.

Die vorliegende Abhandlung bildet eine Fortsetzung des in der Arbeit [3] berührten Themas, jedoch die im folgenden dargestellte Methode umfasst eine breitere Problemenklasse. Die Methode ermöglicht die mittlere Zeitkonstante, der mittels der Wärmeleitungs-Gleichung und der Randbedingungen verschiedener Art beschriebenen Felder zu bestimmen, während die in [3] angegebenen Beziehungen nur im Fall des Dirichlet'schen Randwertproblems gelten.

## 2. DAS VORLIEGENDE RANDWERTPROBLEM

Es soll die zweimal differenzierbare Funktion  $T(P, t)$  in jedem Punkt  $P$  des Raumes  $\Omega$  mit einem stückweise glatten Rand  $\Gamma$  folgende Gleichung

$$\operatorname{div} [\lambda(P) \operatorname{grad} T(P, t)] = C(P) \frac{\partial T(P, t)}{\partial t} - Q(P, t) \quad (2)$$

die Anfangsbedingung

$$T(P, 0) = T_0(P) \quad (3)$$

und die Randbedingungen

$$[T(P, t) - T^*(P, t)]_{P \in \Gamma_1} = 0 \quad (4)$$

$$\left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + q \right]_{P \in \Gamma_2} = 0 \quad (5)$$

$$\left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \delta T \right]_{P \in \Gamma_3} = 0 \quad (6)$$

erfüllen, wobei  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  und  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  ( $i, j = 1, 3; i \neq j$ ) ist. Bildet die Koordinatenfunktionenfolge  $\{\phi_i(P)\}$  einen reellen, normierten, linearen Raum  $H(\Omega)$  der in  $\Omega$  definiten Funktionen, so kann man die angenäherte Lösung  $\tilde{T}_n(P, t) \in H_n(\Omega)$ , wobei  $H_n$  ein Unterraum des Raumes  $H$  ist, in der folgenden Form darstellen

$$\tilde{T}_n(P, t) = \phi^*(P, t) + \langle \Phi(P), \Psi(t) \rangle, \quad (7)$$

wobei  $[\phi^*(P, t)]_{P \in \Gamma_1} = T^*(P, t)$ .

Das Symbol  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bedeutet ein Skalarprodukt der  $n$ -dimensionalen Vektoren ( $\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ ). Die unbekannten Funktionen  $\psi_i(t)$  kann man mit Hilfe der allgemeinen Methode von Galerkin [6, 7, 15] bestimmen. Gemäß der Methode soll die Lösung der Dgl. (2) die Orthogonalforderung [15]

$$\iint_{\Omega} \left[ C \frac{\partial T}{\partial t} - Q - \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) \right] \phi_i d\Omega = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

erfüllen. Aus der Identität

$$\operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) = \lambda \Delta T + \operatorname{grad} \lambda \operatorname{grad} T, \quad (9)$$

dem Green'schen Gesetz und den Bedingungen (5) und (6) folgt

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (\lambda \operatorname{grad} \phi_i \operatorname{grad} T + C \phi_i \frac{\partial T}{\partial t} - Q \phi_i) d\Omega \\ + \int_{\Gamma_2} q \phi_i d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \delta T \phi_i d\Gamma = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (10)$$

\* Diese Arbeit entstand in Rahmen der Zusammenarbeit mit dem Institut für Mathematische Maschinen in Warschau. Der Autor dankt dem Institut für die Förderung seines Forschungsprogramms und den Zutritt zu einigen EDVA-Systemen.

## BEZEICHNUNGEN

<b>A, C</b>	symmetrische Matrizen $\{a_{ij}\}_{i,j=1,n}$ $\{c_{ij}\}_{i,j=1,n}$
<b>B, D</b>	Spaltenmatrizen $\{b_i\}_{i=1,n}$ , $\{d_i\}_{i=1,n}$
$C(P)$	Funktion der räumlichen Variablen
$Q(P, t)$	Funktion der inneren Quellen
$T(P, t)$	instationärer Ausgangsvorgang
$\tilde{T}_n(P, t)$	$n$ -te Näherung der Funktion $T(P, t)$
$a, R$	Abmessungen
$s$	Variable der Laplace'schen Transformation
$w(P)$	Waagefunktion.

Griechische Symbole	
$\Phi(P), \Psi(t)$	Spaltenfunktionsvektoren
$\{\phi_i(P)\}_{i=1,n}, \{\psi_i(t)\}_{i=1,n}$	
$\alpha_i, \beta_i$	Koeffizienten einer Potenzreihe
$\gamma_i$	Eigenwerte
$\lambda(P)$	differenzierbare Funktion der räumlichen Variablen
$\tau(P)$	mittlere Zeitkonstante
$H(\Omega), H_n(\Omega)$	lineare Funktionenräume.

Nach der Einsetzung der angenäherten Lösung (7) in (10), erhält man schliesslich ein System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \psi_j \left( \iint_{\Omega} \lambda \operatorname{grad} \phi_i \operatorname{grad} \phi_j d\Omega + \int_{\Gamma_3} \delta \phi_i \phi_j d\Gamma \right) \\ + \sum_{j=1}^n \frac{d\psi_j}{dt} \iint_{\Omega} C \phi_i \phi_j d\Omega \\ = \iint_{\Omega} \left[ \left( Q - C \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \phi_i - \lambda \operatorname{grad} \phi^* \operatorname{grad} \phi_i \right] \\ \times d\Omega - \int_{\Gamma_2} q \phi_i d\Gamma - \int_{\Gamma_3} \delta \phi^* \phi_i d\Gamma \\ (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11) \end{aligned}$$

Die Anfangswerte  $\Psi(0)$  bestimmt man mit Hilfe der Methode der kleinsten quadratischen Abweichungen [10, 11], nach

$$\iint_{\Omega} w(P) [\tilde{T}_n(P, 0) - T_0(P)]^2 d\Omega = \text{Minimum.} \quad (12)$$

Aus der Minimalforderung ergibt sich ein System von linearen, algebraischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \psi_{j0} \iint_{\Omega} w(P) \phi_i \phi_j d\Omega = \iint_{\Omega} \\ \times w(P) T_0(P) \phi_i d\Omega, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13) \end{aligned}$$

wobei  $\psi_{j0} = \psi_j(0)$  und  $w(P)$  eine Waagefunktion ist.

Die Lösung des Differentialgleichungssystems (11) stößt oft auf Berechnungsschwierigkeiten, die sich u.a. mit der Stabilität der Methode verbinden. Dieses Thema wurde in den letzten Jahren in einer Reihe von Arbeiten besprochen. In der Arbeit [15] wurde die Methode dargestellt, die sich auf die Approximation mit Hilfe der Padé- und Tschebyschev-Polynomen stützt. In anderen Arbeiten wurden sogenannte A-stabile (always stable) Methoden [4, 9] (z.B. Crank-Nicolson-Verfahren) oder die ADI-Methoden (alternating-direction iterative [5, 9]) und ADG-

Methoden (alternating-direction Galerkin [6, 7]) vorgeschlagen.

## 3. DIE MITTLERE ZEITKONSTANTE

Eine wesentliche Bedeutung für die Bestimmung der dynamischen Eigenschaften des Objektes hat die Kenntnis der Sprungantwort. Aus ihrer Laplace'schen Transformation  $T(P, s) = \mathcal{L}[T(P, t)]$  kann man, dem Duhamel'schen Theorem [8, 10] gemäss, die Antwort auf einen beliebigen Eingangsvorgang finden. Deswegen wird weiter vorausgesetzt, dass  $T(P, t)$  eine Sprungantwort auf einen der folgenden Vorgänge  $Q(P, t) = Q(P) \cdot l(t)$ ,  $\phi^*(P, t) = \phi^*(P) \cdot l(t)$  oder  $q(P, t) = q(P) \cdot l(t)$  ist, wobei  $l(t)$  eine Einheitssprungfunktion bildet.

Wendet man die beiderseitige Laplace'sche Transformation auf das Differentialgleichungssystem (11) an, so erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \psi_j(s) \left( \iint_{\Omega} \lambda \operatorname{grad} \phi_i \operatorname{grad} \phi_j d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_3} \delta \phi_i \phi_j d\Gamma \right) + s \sum_{j=1}^n \psi_j(s) \iint_{\Omega} C \phi_i \phi_j d\Omega \\ = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{Q}{s} - C \phi^* \right) \phi_i - \frac{\lambda}{s} \operatorname{grad} \phi^* \operatorname{grad} \phi_i \right] d\Omega \\ - \frac{1}{s} \left( \int_{\Gamma_2} q \phi_i d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \delta \phi^* \phi_i d\Gamma \right) + \sum_{j=1}^n \psi_{j0} \\ \times \iint_{\Omega} C \phi_i \phi_j d\Omega \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (14) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Matrizen kann man das System (14) in der folgenden Form darstellen

$$(\mathbf{A} + s\mathbf{C})\Psi(s) = \frac{1}{s}(\mathbf{B} + s\mathbf{D}) \quad (15)$$

wobei

$$a_{ij} = \iint_{\Omega} \lambda \operatorname{grad} \phi_i \operatorname{grad} \phi_j d\Omega + \int_{\Gamma_3} \delta \phi_i \phi_j d\Gamma \quad (16)$$

$$c_{ij} = \iint_{\Omega} C \phi_i \phi_j d\Omega \quad (17)$$

$$b_i = \iint_{\Omega} (Q \phi_i - \lambda \operatorname{grad} \phi^* \operatorname{grad} \phi_i) d\Omega - \int_{\Gamma_2} q \phi_i d\Gamma - \int_{\Gamma_3} \delta \phi^* \phi_i d\Gamma \quad (18)$$

$$d_i = \sum_{j=1}^n \psi_{j0} \iint_{\Omega} C \phi_i \phi_j d\Omega - \iint_{\Omega} C \phi^* \phi_i d\Omega. \quad (19)$$

Aus den Gl. (19) und (13) folgt die Gestalt der Waagefunktion  $w(P)$ . Nimmt man  $w(P) = C(P)$  an, so geht die Formel (19) in die Folgende

$$d_i = \iint_{\Omega} C(T_0 - \phi^*) d\Omega \quad (20)$$

über.

Um die mittlere Zeitkonstante der Funktion  $T(P, s)$  zu gewinnen, ist es vorteilhaft den Ausdruck

$$\tau(P) = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial s} [T(P, s)]}{T_0(P) - T(P, t \rightarrow \infty)} \quad (21)$$

auszunutzen. Nach der Einstellung der angenäherten Lösung  $\tilde{T}_n(P, s)$  in die Gl. (21) ergibt sich

$$\tau(P) = \frac{\langle \Phi(P), \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [s \Psi(s)] \rangle}{T_0(P) - \phi^*(P) - \langle \Phi(P), \Psi(t \rightarrow \infty) \rangle}. \quad (22)$$

Die Lösung des Systems (15) kann man folgendermassen darstellen

$$\Psi(s) = \frac{1}{s} (\mathbf{A} + s \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{B} + s \mathbf{D}). \quad (23)$$

Daraus folgt

$$\Psi(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \Psi(s)] = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (24)$$

und (siehe 'Mathematischer Anhang')

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [s \Psi(s)] = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{D} - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}). \quad (25)$$

Schliesslich erhält man die Beziehung, die in einer einfachen Weise die Berechnung der mittleren Zeitkonstante, der mit Hilfe der Gl. (2) beschriebenen Vorgängen, gestattet

$$\tau(P) = \frac{\langle \Phi(P), \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{D} - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) \rangle}{T_0(P) - \phi^*(P) - \langle \Phi(P), \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \rangle}. \quad (26)$$

Man kann beweisen, dass wenn die Funktionenfolge  $\{\phi_i(P)\}_{i=1,m}$  ein linear unabhängiges System bildet, ist  $\mathbf{A}$  eine reguläre Matrix. Durch entsprechende Umformungen, die den Rang der Matrix beibehalten, kann man  $\mathbf{A}$  (ebenso wie  $\mathbf{C}$ ) auf die Gramm'sche Matrix [12] zurückführen. Die Matrix  $\mathbf{A}$  besitzt somit eine Kehrmatrix  $\mathbf{A}^{-1}$ . Man muss bemerken, dass die Formel (26) eine Verallgemeinerung der in der Arbeit [3] angegebenen Beziehung (15) bildet. Setzt man

voraus, dass ein Feld  $T(P, t)$  auf dem Rand  $\Gamma$  nur die Dirichlet'sche Randbedingung

$$[T(P, t) - l(t) \cdot T^*]_{\partial \Gamma} = 0 \quad (27)$$

erfüllt und keine Innenquellen vorhanden sind, so ergibt sich

$$\tau(P) = -\frac{1}{T^*} \langle \Phi(P), \mathbf{A}^{-1} \mathbf{D} \rangle. \quad (28)$$

Die Formeln (28) und (15) aus der Arbeit [3] sind äquivalent.

#### 4. BERECHNUNGSBEISPIELE

In diesem Abschnitt werden einige Beispiele dargestellt, die sich mit der instationären Wärmeübertragung verbinden. Diese Beispiele bezwecken nur die Darstellung der Vorteile, der Konvergenz und Wirksamkeit der vorgeschlagenen Methode. Es wird somit nur auf die eindimensionalen Probleme beschränkt, obwohl die Methode, ebenso wie die allgemeine Methode von Galerkin, auch für die mehrdimensionalen Randwertprobleme anwendbar ist.

##### 4.1 Die mittlere Zeitkonstante in einer unendlich ausgedehnten Platte

Ein instationäres Feld  $T(x, t)$  erfüllt im Intervall  $0 \leq x \leq a$  die partielle, homogene Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - C \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (29)$$

die homogene Anfangsbedingung und die 'gemischte' Randbedingung

$$\left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = -q, \quad \text{für } t \geq 0 \quad (30)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=a} = -h T(a, t), \quad \text{für } t \geq 0. \quad (31)$$

Das obenstehende Randwertproblem besitzt für  $C = \kappa^{-1} = \text{const}$  eine exakte Lösung in einer analytischen Form

$$T(\rho, t) = \frac{qa}{\lambda} \left( 1 + \frac{1}{ah} - \rho \right) - \frac{2qa}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_i \rho \exp \left( -\gamma_i^2 \frac{\kappa}{a^2} t \right)}{\gamma_i^2 \left( 1 + \frac{\sin 2\gamma_i}{2\gamma_i} \right)} \quad (32)$$

wobei  $\rho = x/a$  und  $\gamma_i$  die aufeinanderfolgenden, positiven Wurzeln der Gleichung  $\gamma t \kappa \gamma = ah$  sind. Aus der Beziehung (1) folgt die mittlere Zeitkonstante

$$\tau(\rho) = \frac{2a^2}{\kappa \left( 1 + \frac{1}{ah} - \rho \right)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_i \rho}{\gamma_i^4 \left( 1 + \frac{\sin 2\gamma_i}{2\gamma_i} \right)}. \quad (33)$$

Wenn  $C$  keine Konstante, sondern eine Funktion der

räumlichen Variable ist, d.h.

$$C(\rho) = \kappa^{-1} c(\rho) \quad (34)$$

bereitet die Aufgabe der Bestimmung des Feldes  $T(\rho, t)$ , mittels der analytischen Methoden, erhebliche Schwierigkeiten. Man kann dagegen die Galerkin'sche Näherungsmethode anwenden.

Stellt man die Funktion  $c(\rho)$  als eine Summe der ersten  $k+1$  Glieder einer Potenzreihe dar

$$c(\rho) = \sum_{p=0}^k \alpha_p \rho^p \quad (35)$$

so erhält man nach der Annahme der folgenden Koordinatenfunktionen

$$\phi_i(\rho) = \rho^{i-1} \quad (36)$$

die Elemente der entsprechenden Matrizen

$$a^2 a_{ij} = ah + \int_0^1 \phi'_i \phi'_j d\rho$$

$$= ah + \begin{cases} 0 & \text{für } i+j \leq 3 \\ \frac{(i-1)(j-1)}{i+j-3} & \text{für } i+j > 3 \end{cases} \quad (37)$$

$$c_{ij} = \int_0^1 C \phi_i \phi_j d\rho = \kappa^{-1} \sum_{p=0}^k \frac{\alpha_p}{i+j+p-1} \quad (38)$$

$$b_i = \begin{cases} q & \text{für } c = 1 \\ 0 & \text{für } i > 1 \end{cases} \quad (39)$$

$$d_i = 0. \quad (40)$$

In Anlehnung an die Gln (37) bis (40) wurden die numerischen Auswertungen der Zeitkonstante für verschiedene Funktionen  $c(\rho)$  durchgeführt. Für  $c(\rho) = 1$  wurden die Ergebnisse mit der aus der Gl. (33) bestimmten Zeitkonstante verglichen. In der Tabelle 1 wurden die Ergebnisse der folgenden Näherungen ( $n = 2, 3, 4, 5$ ) zusammengestellt. Die angegebenen Werte zeugen von Konvergenz der angewandten Methode.

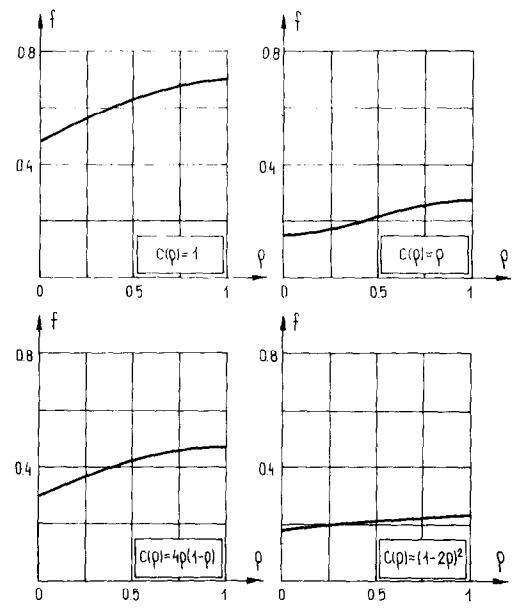


ABB. 1. Verlauf der Funktion  $f(\rho) = \kappa\tau(\rho)/a^2$  in einer unendlich ausgedehnten Platte für verschiedene Funktionen  $c(\rho)$ .

Für  $n = 6$  war ein relativer Fehler kleiner als  $10^{-6}$ . Im Abb. 1 wurde die Verteilung der Funktion  $f(\rho) = \kappa a^{-2} \tau(\rho)$  für verschiedene Funktionen  $c(\rho)$  dargestellt.

#### 4.2 Die mittlere Zeitkonstante in einem Kreiszylinder

Ein instationäres Feld  $T(r, t)$  erfüllt im Intervall  $0 \leq r \leq R$  die inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - C \frac{\partial T}{\partial t} = -Q \quad (41)$$

die homogene Anfangsbedingung und die Rand-

Tabelle 1. Ergebnisse der folgenden Näherungen der Funktion  $f(\rho) = \kappa\tau(\rho)/a^2$  in einer unendlich ausgedehnten Platte ( $C(\rho) = \text{const}$ )

ah	n	x/a				
		0	0.25	0.5	0.75	1
1	2	1.1667	1.2143	1.2778	1.3667	1.5000
	3	1.1667	1.2946	1.4028	1.4792	1.5000
	4	1.1667	1.2991	1.4028	1.4729	1.5000
	5	1.1667	1.2991	1.4028	1.4729	1.5000
	genau	1.1667	1.2991	1.4028	1.4729	1.5000
5	2	$4.7778 \times 10^{-1}$	$4.8947 \times 10^{-1}$	$5.0952 \times 10^{-1}$	$5.5185 \times 10^{-1}$	$7.0000 \times 10^{-1}$
	3	$4.7778 \times 10^{-1}$	$5.5855 \times 10^{-1}$	$6.3452 \times 10^{-1}$	$6.9769 \times 10^{-1}$	$7.0000 \times 10^{-1}$
	4	$4.7778 \times 10^{-1}$	$5.6678 \times 10^{-1}$	$6.3452 \times 10^{-1}$	$6.8032 \times 10^{-1}$	$7.0000 \times 10^{-1}$
	5	$4.7778 \times 10^{-1}$	$5.6678 \times 10^{-1}$	$6.3452 \times 10^{-1}$	$6.8032 \times 10^{-1}$	$7.0000 \times 10^{-1}$
	genau	$4.7778 \times 10^{-1}$	$5.6678 \times 10^{-1}$	$6.3452 \times 10^{-1}$	$6.8032 \times 10^{-1}$	$7.0000 \times 10^{-1}$
10	2	$4.0303 \times 10^{-1}$	$4.0882 \times 10^{-1}$	$4.1944 \times 10^{-1}$	$4.4524 \times 10^{-1}$	$6.0000 \times 10^{-1}$
	3	$4.0303 \times 10^{-1}$	$4.7500 \times 10^{-1}$	$5.4444 \times 10^{-1}$	$6.0595 \times 10^{-1}$	$6.0000 \times 10^{-1}$
	4	$4.0303 \times 10^{-1}$	$4.8419 \times 10^{-1}$	$5.4444 \times 10^{-1}$	$5.8363 \times 10^{-1}$	$6.0000 \times 10^{-1}$
	5	$4.0303 \times 10^{-1}$	$4.8419 \times 10^{-1}$	$5.4444 \times 10^{-1}$	$5.8363 \times 10^{-1}$	$6.0000 \times 10^{-1}$
	genau	$4.0303 \times 10^{-1}$	$4.8419 \times 10^{-1}$	$5.4444 \times 10^{-1}$	$5.8363 \times 10^{-1}$	$6.0000 \times 10^{-1}$

bedingung dritter Art

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = -hT(R, t) \quad \text{für } t \geq 0. \quad (42)$$

Wenn  $C = \text{const}$  und  $Q = \text{const}$ , so ergibt sich die analytische Lösung dieses Problems

$$T(\rho, t) = \frac{1}{4}QR^2 \left(1 + \frac{2}{Rh} - \rho^2\right) - 2QR^3h \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \rho) \exp\left(-\gamma_i^2 \frac{\kappa}{R^2} t\right)}{\gamma_i^2 (R^2 h^2 + \gamma_i^2) J_0(\gamma_i)} \quad (43)$$

und die Zeitkonstante stellt sich folgendermassen

$$\tau(\rho) = \frac{8R^3h}{\kappa \left(1 + \frac{2}{Rh} - \rho^2\right)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \rho)}{\gamma_i^2 (R^2 h^2 + \gamma_i^2) J_0(\gamma_i)} \quad (44)$$

wobei  $\rho = r/R$  und  $\gamma_i$  die aufeinanderfolgenden, positiven Wurzeln der Gleichung  $RhJ_0(\gamma) - \gamma J_1(\gamma) = 0$  sind.

Es sollen die Funktionen  $c(\rho)$  und  $\phi_i(\rho)$  genauso wie vorher angenommen und die Funktion  $Q(\rho)$  wie folgt vorausgesetzt werden

$$Q(\rho) = \sum_{p=0}^l \beta_p \rho^p. \quad (45)$$

Aus der Gln (16) bis (18) und (20) erhält man

$$R^2 \alpha_{ij} = Rh + \int_0^1 \phi_i' \phi_j' \rho \, d\rho = Rh + \begin{cases} 0 & \text{für } i+j = 2 \\ \frac{(i-1)(j-1)}{i+j-2} & \text{für } i+j \neq 2 \end{cases} \quad (46)$$

$$c_{ij} = \int_0^1 C \phi_i \phi_j \rho \, d\rho = \kappa^{-1} \sum_{p=0}^k \frac{\alpha_p}{i+j+p} \quad (47)$$

$$b_i = \int_0^1 Q \phi_i \rho \, d\rho = \sum_{p=0}^l \frac{\beta_p}{i+p+1} \quad (48)$$

$$d_i = 0. \quad (49)$$

Die Ergebnisse der numerischen Auswertungen wurden in den Abb. 2, 3 und der Tabelle 2 dargestellt. Für  $c(\rho) \equiv 1$  und  $n = 6$  wurden die Ergebnisse mit einem relativen Fehler von  $10^{-5}$  gewonnen.

#### 4.3 Die mittlere Zeitkonstante in einer Kugel

Ein instationäres Feld  $T(r, t)$ , erfüllt im Intervall  $0 \leq r \leq R$  die homogene Gleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - C \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (50)$$

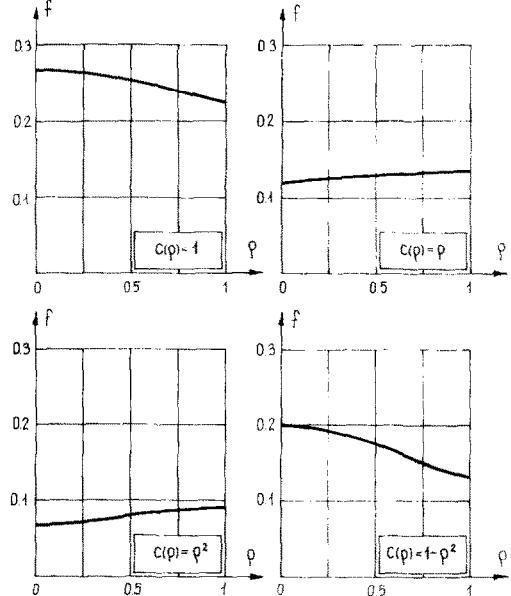


ABB. 2. Verlauf der Funktion  $f(\rho) = \kappa\tau(\rho)/R^2$  in einem unendlich langen Kreiszylinder für verschiedene Funktionen  $c(\rho)$  und  $Q(\rho) \equiv 1$ .

Tabelle 2. Ergebnisse der folgenden Näherungen der Funktion  $f(\rho) = \kappa\tau(\rho)/R^2$  in einem unendlich langen Kreiszylinder ( $C(\rho), Q(\rho) = \text{const}$ )

$Rh$	$n$	$r/R$				
		0	0.25	0.5	0.75	1
1	2	$6.3333 \times 10^{-1}$	$6.2963 \times 10^{-1}$	$6.2500 \times 10^{-1}$	$6.1905 \times 10^{-1}$	$6.1111 \times 10^{-1}$
	3	$6.5000 \times 10^{-1}$	$6.4255 \times 10^{-1}$	$6.3636 \times 10^{-1}$	$6.3077 \times 10^{-1}$	$6.2500 \times 10^{-1}$
	4	$6.4524 \times 10^{-1}$	$6.4392 \times 10^{-1}$	$6.3766 \times 10^{-1}$	$6.2985 \times 10^{-1}$	$6.2500 \times 10^{-1}$
	5	$6.4583 \times 10^{-1}$	$6.4370 \times 10^{-1}$	$6.3778 \times 10^{-1}$	$6.2991 \times 10^{-1}$	$6.2500 \times 10^{-1}$
	genau	$6.4584 \times 10^{-1}$	$6.4370 \times 10^{-1}$	$6.3778 \times 10^{-1}$	$6.2991 \times 10^{-1}$	$6.2500 \times 10^{-1}$
	2	$2.5385 \times 10^{-1}$	$2.5079 \times 10^{-1}$	$2.4583 \times 10^{-1}$	$2.3636 \times 10^{-1}$	$2.1111 \times 10^{-1}$
5	3	$2.7857 \times 10^{-1}$	$2.6355 \times 10^{-1}$	$2.5217 \times 10^{-1}$	$2.4179 \times 10^{-1}$	$2.2500 \times 10^{-1}$
	4	$2.6837 \times 10^{-1}$	$2.6656 \times 10^{-1}$	$2.5528 \times 10^{-1}$	$2.3913 \times 10^{-1}$	$2.2500 \times 10^{-1}$
	5	$2.6964 \times 10^{-1}$	$2.6607 \times 10^{-1}$	$2.5557 \times 10^{-1}$	$2.3928 \times 10^{-1}$	$2.2500 \times 10^{-1}$
	genau	$2.6964 \times 10^{-1}$	$2.6607 \times 10^{-1}$	$2.5557 \times 10^{-1}$	$2.3928 \times 10^{-1}$	$2.2500 \times 10^{-1}$
	2	$2.0942 \times 10^{-1}$	$2.0741 \times 10^{-1}$	$2.0385 \times 10^{-1}$	$1.9583 \times 10^{-1}$	$1.6111 \times 10^{-1}$
	3	$2.3750 \times 10^{-1}$	$2.2033 \times 10^{-1}$	$2.0790 \times 10^{-1}$	$1.9706 \times 10^{-1}$	$1.7500 \times 10^{-1}$
10	4	$2.2560 \times 10^{-1}$	$2.2386 \times 10^{-1}$	$2.1165 \times 10^{-1}$	$1.9356 \times 10^{-1}$	$1.7500 \times 10^{-1}$
	5	$2.2708 \times 10^{-1}$	$2.2329 \times 10^{-1}$	$2.1201 \times 10^{-1}$	$1.9377 \times 10^{-1}$	$1.7500 \times 10^{-1}$
	genau	$2.2708 \times 10^{-1}$	$2.2329 \times 10^{-1}$	$2.1201 \times 10^{-1}$	$1.9377 \times 10^{-1}$	$1.7500 \times 10^{-1}$

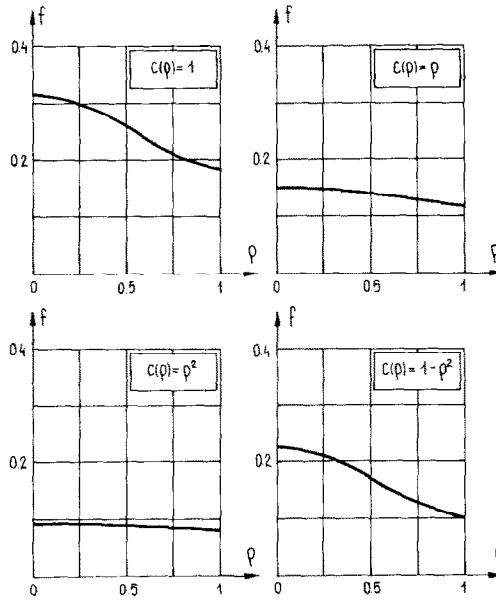


ABB. 3. Verlauf der Funktion  $f(\rho) = \kappa\tau(\rho)/R^2$  in einem unendlich langen Kreiszylinder für verschiedene Funktionen  $c(\rho)$  und  $Q(\rho) \equiv \rho^2$ .

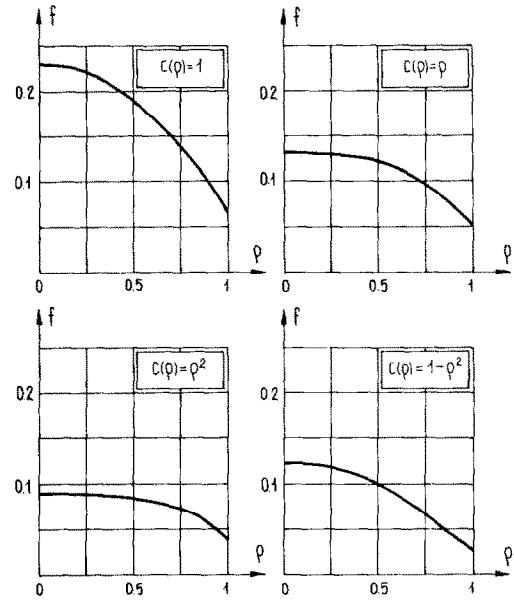


ABB. 4. Verlauf der Funktion  $f(\rho) = \kappa\tau(\rho)/R^2$  in einer Kugel für verschiedene Funktionen  $c(\rho)$ .

die Anfangsbedingung

$$T(r, 0) = T_0 \quad \text{für } 0 \leq r \leq R \quad (51)$$

und die Randbedingung der dritten Art

$$\left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = -hT(R, t) \quad \text{für } t \geq 0. \quad (52)$$

Wenn  $C = \text{const}$ , erhält man die exakte Lösung des Problems

$$T(\rho, t) = \frac{2T_0Rh}{\rho} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_i \sin \gamma_i \rho \exp\left(-\gamma_i^2 \frac{\kappa}{R^2} t\right)}{\gamma_i^2 \left(1 - \frac{\sin 2\gamma_i}{2\gamma_i}\right)} \quad (53)$$

und die mittlere Zeitkonstante

$$\tau(\rho) = \frac{2R^3 h}{\kappa \rho} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_i \sin \gamma_i \rho}{\gamma_i^4 \left(1 - \frac{\sin 2\gamma_i}{2\gamma_i}\right)} \quad (54)$$

wobei  $\rho = r/R$  und  $\gamma_i$  die aufeinanderfolgenden, positiven Wurzeln der Gleichung  $\gamma \text{ctg} \gamma = 1 - Rh$  sind.

Nach der Annahme der Funktionen  $c(\rho)$  und  $\phi_i(\rho)$  in Gestalt (35) und (36) ergibt sich

$$R^2 a_{ij} = Rh + \int_0^1 \phi'_i \phi'_j \rho^2 d\rho = Rh + \begin{cases} 0 & \text{für } i+j=2 \\ \frac{(i-1)(j-1)}{i+j-1} & \text{für } i+j \neq 2 \end{cases} \quad (55)$$

$$c_{ij} = \int_0^1 C \phi_i \phi_j \rho^2 d\rho = \kappa^{-1} \sum_{p=0}^k \frac{\alpha_p}{i+j+p+1}, \quad (56)$$

$$b_i = 0, \quad (57)$$

$$d_i = T_0 \int_0^1 C \phi_i \rho^2 d\rho = T_0 \kappa^{-1} \sum_{p=0}^k \frac{\alpha_p}{i+p+2}. \quad (58)$$

Die Ergebnisse der numerischen Auswertungen wurden im Abb. 4 und der Tabelle 3 dargestellt. Für  $c(\rho) \equiv 1$  und  $n = 6$  erhält man die Näherung mit dem relativen Fehler der kleiner als  $10^{-4}$  ist.

## 5. SCHLUSSBEMERKUNGEN

In der Arbeit wurde die Methode der numerischen Bestimmung der mittleren Zeitkonstante mit Hilfe der, durch die Diffusionsgleichung beschriebenen Vorgänge vorgeschlagen. Zur Lösung des Randwertproblems wurde die allgemeine Methode von Galerkin angewandt. Aus der Laplace'schen Transformation des gesuchten, instationären Verlaufes  $T(P, t)$  wurde die allgemeine Abhängigkeit abgeleitet, die eine effektive Berechnung der Zeitkonstante ermöglicht. Die dargestellte Methode gestattet, die inhomogenen Eigenschaften des Raumes und die linearen Randbedingungen verschiedener Art zu berücksichtigen. Die gewonnenen Formeln bilden eine Verallgemeinerung und Erweiterung der Ergebnisse der Arbeit [3]. Die Methode wurde an einigen Beispielen erläutert, die von ihrer Verwendbarkeit bei praktischen, numerischen Berechnungen zeugen.

## 6. MATHEMATISCHER ANHANG

Für die Matrizen  $\mathbf{A}(s)$  und  $\mathbf{B}(s)$  mit den Elementen  $a_{ij}(s)$  und  $b_{ij}(s)$  gelten folgende allgemeine Beziehungen

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{ds} + \frac{d\mathbf{B}}{ds}, \quad (59)$$

Tabelle 3. Ergebnisse der folgenden Näherungen der Funktion  $f(\rho) = \kappa\tau(\rho)/R^2$  in einer Kugel ( $C(\rho) = \text{const}$ )

		$r/R$				
$Rh$	$n$	0	0.25	0.5	0.75	1
1	2	$5.8333 \times 10^{-1}$	$5.2083 \times 10^{-1}$	$4.5833 \times 10^{-1}$	$3.9583 \times 10^{-1}$	$3.3333 \times 10^{-1}$
	3	$5.0000 \times 10^{-1}$	$4.8958 \times 10^{-1}$	$4.5833 \times 10^{-1}$	$4.0625 \times 10^{-1}$	$3.3333 \times 10^{-1}$
	4	$5.0000 \times 10^{-1}$	$4.8958 \times 10^{-1}$	$4.5833 \times 10^{-1}$	$4.0625 \times 10^{-1}$	$3.3333 \times 10^{-1}$
	5	$5.0000 \times 10^{-1}$	$4.8958 \times 10^{-1}$	$4.5833 \times 10^{-1}$	$4.0625 \times 10^{-1}$	$3.3333 \times 10^{-1}$
	genau	$5.0000 \times 10^{-1}$	$4.8958 \times 10^{-1}$	$4.5833 \times 10^{-1}$	$4.0625 \times 10^{-1}$	$3.3333 \times 10^{-1}$
	2	$3.1667 \times 10^{-1}$	$2.5417 \times 10^{-1}$	$1.9167 \times 10^{-1}$	$1.2917 \times 10^{-1}$	$6.6667 \times 10^{-2}$
5	3	$2.3333 \times 10^{-1}$	$2.2292 \times 10^{-1}$	$1.9167 \times 10^{-1}$	$1.3958 \times 10^{-1}$	$6.6667 \times 10^{-2}$
	4	$2.3333 \times 10^{-1}$	$2.2292 \times 10^{-1}$	$1.9167 \times 10^{-1}$	$1.3958 \times 10^{-1}$	$6.6667 \times 10^{-2}$
	5	$2.3333 \times 10^{-1}$	$2.2292 \times 10^{-1}$	$1.9167 \times 10^{-1}$	$1.3958 \times 10^{-1}$	$6.6667 \times 10^{-2}$
	genau	$2.3333 \times 10^{-1}$	$2.2292 \times 10^{-1}$	$1.9167 \times 10^{-1}$	$1.3958 \times 10^{-1}$	$6.6667 \times 10^{-2}$
	2	$2.8333 \times 10^{-1}$	$2.2083 \times 10^{-1}$	$1.5833 \times 10^{-1}$	$9.5833 \times 10^{-2}$	$3.3333 \times 10^{-2}$
	3	$2.0000 \times 10^{-1}$	$1.8958 \times 10^{-1}$	$1.5833 \times 10^{-1}$	$1.0625 \times 10^{-1}$	$3.3333 \times 10^{-2}$
10	4	$2.0000 \times 10^{-1}$	$1.8958 \times 10^{-1}$	$1.5833 \times 10^{-1}$	$1.0625 \times 10^{-1}$	$3.3333 \times 10^{-2}$
	5	$2.0000 \times 10^{-1}$	$1.8958 \times 10^{-1}$	$1.5833 \times 10^{-1}$	$1.0625 \times 10^{-1}$	$3.3333 \times 10^{-2}$
	genau	$2.0000 \times 10^{-1}$	$1.8958 \times 10^{-1}$	$1.5833 \times 10^{-1}$	$1.0625 \times 10^{-1}$	$3.3333 \times 10^{-2}$

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{AB}) = \frac{d\mathbf{A}}{ds}\mathbf{B} + \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{ds}. \quad (60)$$

Wenn  $\mathbf{A}(s)$  eine quadratische Matrix und  $n$  eine ganze positive Zahl ist, so [12]

$$\frac{d\mathbf{A}^n}{ds} = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}^{j-1} \frac{d\mathbf{A}}{ds} \mathbf{A}^{n-j} \quad (61)$$

$$\frac{d\mathbf{A}^{-n}}{ds} = -\mathbf{A}^{-n} \frac{d\mathbf{A}^n}{ds} \mathbf{A}^{-n}. \quad (62)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [s\Psi(s)] &= [(A + sC)^{-1}(B + sD)]' \\ &= [(A + sC)^{-1}](B + sD) \\ &\quad + (A + sC)^{-1}(B + sD)' \\ &= (A + sC)^{-1}[-C(A + sC)^{-1}(B + sD) + D] \end{aligned} \quad (63)$$

und die Gl. (25)

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [s\Psi(s)] = A^{-1}(D - CA^{-1}B). \quad (64)$$

## LITERATUR

1. M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York (1970).
2. A. Avramanescu, Eindringzeit des elektromagnetischen Feldes und des Wärmefeldes im Leiter, *Elektrotech. Z. Ausg. A* **91**, 235–238 (1970).
3. A. Brykalski and P. Krasoń, A direct variational method for the determination of the equivalent time constant of diffusion processes, *Int. J. Heat Mass Transfer* **26**, 445–449 (1983).
4. G. Dahlquist and Å. Björck, *Numerical Methods*. Prentice Hall, Engelwood Cliffs, New Jersey (1974).
5. I. Douglas and H. H. Rachford, On the numerical solution of heat conduction problems in two and three variables, *Trans. Am. math. Soc.* **82**, 421–439 (1956).
6. M. Dryja, Alternating direction Galerkin methods for the system of hyperbolic equation of first order, *SIAM J. Num. Anal.* **15**, 81–89 (1978).
7. G. Fairweather, Finite element Galerkin methods for differential equations, *Lect. Notes Pure App. Math.* **34** (1978).
8. U. Grigull and H. Sandner, *Wärmeleitung*. Springer-Verlag, Berlin (1979).
9. M. Klerer and G. A. Korn, *Digital Computer User's Handbook*. McGraw-Hill, New York (1967).
10. G. A. Korn and T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, New York (1961).
11. B. Krajewski, Ein direktes Variationsverfahren zur Behandlung der Wärmeübertragungsprobleme für erzwungene Konvektion, *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**, 469–483 (1973).
12. P. Lancaster, *Theory of Matrices*. Academic Press, New York (1969).
13. C. I. Mocanu, Über die Zeitkonstante des Skineffektes, *Elektrotech. Z. Ausg. A* **92**, 156–161 (1971).
14. S. D. Savakar, On a variational formulation of class of thermal entrance problems, *Int. J. Heat Mass Transfer* **13**, 1187–1197 (1970).
15. S. Varga, Functional analysis and approximation theory in numerical analysis, *Soc. Ind. App. Math.*, Philadelphia (1971).
16. O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill, London (1971).

## CONTRIBUTION A LA DETERMINATION DE LA CONSTANTE DE TEMPS EQUIVALENTE DES MECANISMES DE DIFFUSION

**Résumé**— La méthode de Galerkin a été appliquée à la détermination de la constante de temps des mécanismes de diffusion. Après avoir établi la réponse à une fonction échelon, les formules générales sont obtenues pour prendre en compte des conditions aux limites de différentes espèces. La méthode est illustrée par des exemples numériques.

## CONTRIBUTION FOR THE DETERMINATION OF THE EQUIVALENT TIME CONSTANT OF DIFFUSION PROCESSES

**Abstract**—In the paper the general Galerkin method has been applied for the determination of the equivalent time constant of diffusion processes. After establishing the step function response the general formulas have been obtained, which allow for the consideration of boundary conditions of various kinds. The method has been illustrated with some numerical examples.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ПОСТОЯННОЙ ВРЕМЕНИ  
ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

**Аннотация**—В работе общий метод Галеркина применен для определения эквивалентной постоянной времени диффузионных процессов. На основании отклика ступенчатой функции получены общие формулы, позволяющие учитывать граничные условия различного рода. Метод проиллюстрирован числовыми примерами.